**基于光纤传感器的平面曲线重建算法建模**

摘要

实时获得结构实时应变信息，再通过解调出来的应变参数来重构得到结构的形变或位移，对于光纤传感器的实际应用具有重要意义。本文首先解调出光纤对应点的曲率，通过三次样条插值法得到弧长对应曲率的近似值，进一步地，利用上述数据和问题给出的初始夹角，运用平面坐标变换算法和曲线微分的思想建立数学物理模型，递推法重构平面曲线，最后，采样重构问题给出的平面曲线，与原曲线对比分析出现误差的原因以及该模型的不足之处。

针对问题一：我们首先运用问题给出的光纤曲率与波长的数学关系，通过问题给出的各个传感器的信号波长，解调出各个传感器处的光纤曲率。然后，我们作出假设，各个点横坐标x轴与对应的曲线弧长一致，运用三次样条插值法，通过解调出的六点曲率，插值得到问题要求的横坐标x轴对应的光纤曲率的近似值。

针对问题二：考虑到除我们在问题一解调出各传感器处对应光栅曲率数据外，问题还给出了光纤在平面内受力后在初始位置的切线斜率，为了尽可能精确地重构出光栅应变曲线，我们在微分思想的指导下，将整条曲线等弧长的划分为尽可能小的微圆弧，对于曲线而言,只要曲线上两点距离足够近,就可以近似认为这两点之间的弧是一段微圆弧，此时每段微圆弧的曲率变化时是均匀的，并且每条微圆弧可以在平面坐标中用一个点的坐标去表示，通过三次样条插值法，插值得到每段微圆弧对应的曲率的近似值，然后，运用坐标系运动思想找到相邻两个运动坐标系的关系，利用每段微圆弧曲率以及起始点切线斜率，迭代得到每条微圆弧的对应平面坐标，最后将得到的所有微圆弧平面坐标在平面坐标系中拟合，完成曲线重构。完成曲线重构后，分析重构曲线，我们得到了光纤的平面应变规律，还发现了我们在问题一中假设各个点横坐标x轴与对应的曲线弧长一致带来的巨大误差。然后我们想到可以利用重构后的曲线来求出问题一中对应横坐标x轴位置曲率的近似值，并且注意到曲线上有些x对应多个y即多个弧长，也就有多个曲率，而有些则超出范围没有曲率。

针对问题三：我们使用问题二中模型来重构问题给出曲线，使用均方根误差（RMSE）来评估不同数量的取样点得到的重构曲线，并对比重构曲线和原始曲线来分析该数学模型下的误差所在。最后，本次研究提出的数学模型可为重构带有传感器的光纤平面曲线提供帮助，此外，对重构可微分曲线也具有一定意义。

**关键词：三次样条插值法 曲线微分 运动坐标系 RMSE评估**

**目录**

[摘要 1](#_Toc164614662)

[一、问题重述 3](#_Toc164614663)

[1.1问题背景 3](#_Toc164614664)

[1.2问题要求 3](#_Toc164614665)

[二、问题分析 5](#_Toc164614666)

[2.1 针对问题一 5](#_Toc164614667)

[2.2 针对问题二 5](#_Toc164614668)

[2.3 针对问题三 5](#_Toc164614669)

[三、模型假设 6](#_Toc164614670)

[四、符号说明 7](#_Toc164614671)

[五、模型的建立与求解 8](#_Toc164614672)

[5.1 问题一的模型建立与求解 8](#_Toc164614673)

[5.1.1 数据预处理 8](#_Toc164614674)

[5.1.2 三次样条插值模型的建立 8](#_Toc164614675)

[5.1.3 模型的求解 9](#_Toc164614676)

[5.2 问题二的模型建立与求解 9](#_Toc164614677)

[5.2.1运用运动坐标系和曲线微分的思想建立数学物理模型 9](#_Toc164614678)

[5.2.2 模型的求解 11](#_Toc164614679)

[5.2.3 模型结果的分析 13](#_Toc164614680)

[5.3 问题三的求解 15](#_Toc164614681)

[5.3.1 对给出曲线进行取样重构 15](#_Toc164614682)

[5.3.2 曲线误差分析 16](#_Toc164614683)

[六、模型评价 19](#_Toc164614684)

[6.1 模型优点 19](#_Toc164614685)

[6.2 模型缺点 19](#_Toc164614686)

[6.3模型的推广 19](#_Toc164614687)

[七、参考文献 20](#_Toc164614688)

[八、附录 21](#_Toc164614689)

一、问题重述

**1.1问题背景**

光纤传感技术是伴随着光纤及光通信技术发展起来的一种新型传感器技术。它是以光波为传感信号、光纤为传输载体来感知外界环境中的信号其基本原理是当外界环境参数发生变化时，会引起光纤传感器中光波参量（如波长、相位、强度等）的变化，即外界信号变化会对光信号产生调制。光纤传感器具有质地轻、体积小、弯曲性能好，抗电磁干扰能力强，灵敏度高，易于安装使用等优点。光纤传感技术最重要的是实时获得结构时应变信息，再通过解调出来的应变参数来重构得到结构的形变或位移。光纤传感器已在许多领域有实际应用，比如能够对结肠部位进行形状重建等。通过光纤传感器解调系统解调出来的应变信息，间接求出曲率等信息，并基于离散曲率信息对曲线进行重构。

生产光纤时，为了便于测量波长，光纤上已等间距的安装了传感器，给出了6个传感器的间距和传感器信号波长与该处曲线曲率的关系（），以及两组不同受力状态下的所测量的波长值。

表1 波长（纳米）测量值

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 测量点 | 初始状态1 | 测量1 | 初始状态2 | 测量2 |
| FBG1 | 1529 | 1529.808 | 1540 | 1541.095 |
| FBG2 | 1529 | 1529.807 | 1540 | 1541.092 |
| FBG3 | 1529 | 1529.813 | 1540 | 1541.090 |
| FBG4 | 1529 | 1529.812 | 1540 | 1541.093 |
| FBG5 | 1529 | 1529.814 | 1540 | 1541.094 |
| FBG6 | 1529 | 1529.809 | 1540 | 1541.091 |

**1.2问题要求**

基于以上背景以及已有数据，建立数学模型完成以下问题：

**问题一：**请根据表 1 给出的波长测量数据，构建数学模型，估算平面光栅各个传感点(FBG1-FBG6)的曲率。进一步，假设初始点坐标为原点，初始的水平光纤方向为x轴，垂直方向为y轴，光纤在平面内受力后在初始位置的切线与水平方向的夹角为 45度，请建立模型估算下列表格中横坐标x轴相应位置处的曲率。

表2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 横坐标x(米) | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
| 测试1曲率k |  |  |  |  |  |
| 测试1曲率k |  |  |  |  |  |

**问题二：**请根据表 1 波长测量数据和问题 1 求出的曲率，构建数学模型，分别重构平面曲线，并分析曲线的特点。

**问题三：**请根据平面曲线方程x= x3 + x(0 ≤ x ≤ 1)，以适当的等间距弧长采样，计算这些采样点的曲率。然后以采样的曲率为基础，构建数学模型，重构平面曲线，并分析重构曲线与原始曲线出现误差的原因。

二、问题分析

**2.1 针对问题一**

本题主要是根据已测得的传感点处信号波长，利用题中给出的波长与曲线曲率关系，得到平面光栅各个传感点的曲率，然后根据解调出的各点曲率，构建数学模型，近似估计题目要求的各点曲率。

**2.2 针对问题二**

本题主要是在问题一的基础上，结合问题一得到的数据与问题一给出的光纤曲线的初始状态，建立合适的数学模型，重构光纤的平面曲线。本题是一个曲线拟合问题，在这里我们使用运动坐标系和曲线微分的思想建立数学物理模型求解。然后分析该曲线的特点，得到光纤平面上的应变规律。

**2.3 针对问题三**

本题主要是利用问题一、二中建立的数学模型，自行选择合适采样点采样题中所给曲线进行曲线重构，我们采用均方根误差（RMSE）来评价所得重构曲线，以得到的均方根误差来评估重构曲线，并分析重构曲线的误差所在，分析所建立数学模型的值得改进之处。

三、模型假设

1. 题目所给信号波长数据的来源和质量真实可靠，且符合实际情况；
2. 传感器检测设备工作状态作为不考虑的量，将看成正常工作的设备，其 保持稳定的检测精度和稳定的检测频率。
3. 题中常数c依据题中假设为4200；
4. 将光纤视为空间上的一条曲线，不考虑其自身半径等因素；
5. 将部分光纤划分100段视为小圆弧两端已足够近，其已经微分为微圆弧，其曲率变化均匀；
6. 光纤形状只受外界应力影响，不考虑温度等其他因素；
7. 构建重构曲线时，只考虑平面方向上的弯曲，不考虑其空间方向上的扭转。

四、符号说明

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 符号 | 说明 | 单位 |
| *k* | 曲线上某点的曲线曲率 | 1/m |
| *xi* | 曲线上第i个点在相应坐标系中横坐标 | m |
| *yi* | 曲线上第i个点在相应坐标系中纵坐标 | m |
| *θ* | 表示两线形成的夹角 | ° |
| *R* | 圆弧对应圆的半径 | m |
| *λ* | 信号波长 | nm |
| *s* | 弧长 | m |

五、模型的建立与求解

**5.1 问题一的模型建立与求解**

5.1.1 数据预处理

本团队基于题目所给的数据进行了数据分析，发现题目没有直接给出各个传感点的对于曲线曲率，而是给出了各传感点的信号波长以及其与曲线曲率的关系式。

由题中给出的 （这里c假设为4200）

易知各点的曲线曲率为

表5.1 各个传感点对应的曲线曲率

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 测量点 | FBG1 | FBG2 | FBG3 | FBG4 | FBG5 | FBG6 |
| 测试 1 曲率k | 2.2195 | 2.2167 | 2.2332 | 2.2305 | 2.236 | 2.2222 |
| 测试 2 曲率k | 2.9864 | 2.9782 | 2.9727 | 2.9809 | 2.9836 | 2.9755 |

5.1.2 三次样条插值模型的建立

得到每个传感点对应的曲线曲率后,需使用一定的曲率连续化方法求出曲线上更多点的曲率,以便之后采用坐标点拟合算法拟合出足够多点的坐标值。目前采用的曲率连续化插值法为线性插值法以及B样条曲线插值法。前者的运算时间较快,但由于曲率分割简单,分割点的连接处不平滑,与实际产生的曲率曲线有一定的差距。后者解决了分割点连接处的光滑问题,但6个离散曲率检测点的曲率不全在拟合出的曲率连续化曲线上,会产生一定的拟合误差。为了解决以上问题,这里采取了三次样条曲率插值法[1]。

在三次样条插值法中，数学上某点曲线曲率与弧长的关系满足

其中四个系数皆为待定系数，通过数学关系列出方程式组求解，即可得到三次样条插值的数学模型。

则曲线在第i个分割点满足以下关系:

即曲率满足插值连续性关系、以及一阶和二阶微分连续性关系。这样能保证拟合出来的曲率连续化曲线是绝对光滑的。在当前的问题背景下,光纤首尾两端是自由边界,即k″(0)=0、k″(S总)=0。求出系数后,可通过曲线上每一个插值点的弧长计算出曲率。

5.1.3 模型的求解

基于上述模型的分析，使用 Matlab编写程序，得到各点横坐标与对应曲线的曲率。

假设每点横坐标与其弧长相对应，那么以此模型算的横坐标0.3m-0.7m对应曲率为：

表5.2 求得问题一中各个横坐标对应曲线曲率

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 横坐标*x*(米) | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
| 测试 1 曲率*k1* | 2.212 | 2.2126 | 2.2143 | 2.2167 | 2.2198 |
| 测试 2 曲率*k2* | 2.9832 | 2.9816 | 2.9799 | 2.9782 | 2.9765 |

**5.2 问题二的模型建立与求解**

5.2.1运用运动坐标系和曲线微分的思想建立数学物理模型

高等数学上，曲率可以由

计算得到

由此微分方程可以获得某点曲率与其坐标的关系，进而获得曲线上点的平面坐标，以此重构曲线。

然而，这种曲率计算方式计算局部位置曲率时很容易受到毛刺的影响，所以所得重构曲线易出现较大误差，并且没有考虑到问题一给出的起始点的切线斜率对于重构曲线的影响。

为了尽可能重构出精确的拟合曲线，充分利用题目给出条件，我们运用平面变换算法来建立重构曲线的数学模型。

对于曲线而言,只要曲线上两点距离足够近,就可以近似认为这两点之间的弧是一段微圆弧，并且每条微圆弧可以在平面坐标中用一个点的坐标去表示[2]。

我们可以通过求得每段小圆弧坐标，进而重构整条曲线。

先通过应变求解曲率,在通过三次样条插值方法得到曲率-微圆弧数据对,平面坐标变换算法采用的是坐标系运动思想,通过相邻两个点的相对坐标关系,如图5.1所示，

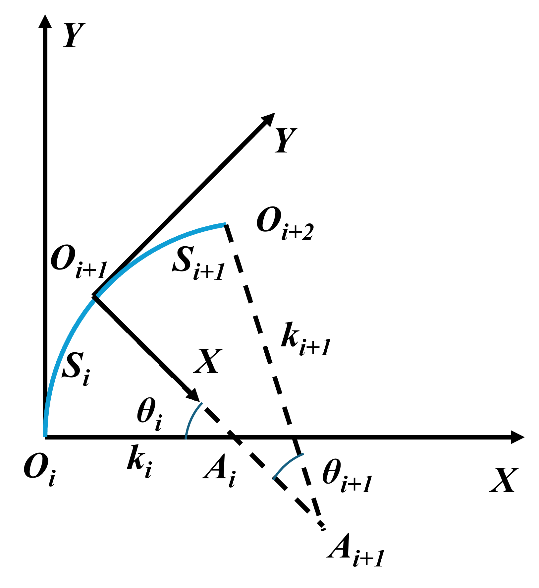


图5.1 微圆弧平面变换示意图

图5.1中曲线上每一点处建立运动坐标系其x轴指向始终为：沿其曲线的微圆弧半径指向其圆心A,我们假设O(i)点处的切线与x坐标轴正半轴的夹角为𝜃i ，由于：

其中dθ为微圆弧的微弧度，我们通过三次样条插值方法得到曲率-微圆弧数据对，即可用ds表示逼近无限小的微元，在这种微元思想中，我们由对应弧长的曲率可以算出对应弧长的半径R，有ds和R之后我们很容易求出d 𝜃。

而在运动坐标系中，由于d 𝜃很小，我们可以近似成两个点的坐标系偏差很小，所以我们就可以认为ds即为两相邻运动坐标系点原点连线的距离，则后一个点在前一个点的运动坐标系中坐标表示为：

设前一个点为O(i)在其前一个点O（i-1）的运动坐标系中对应坐标为(),则后一个点O(i+1)在点O（i-1）对应坐标为()有：

其中(𝜃+ⅆ𝜃)即变化后的切线角度，要求下一个点的坐标我们要先得到下一点相对于前一个点的切线角度变化（在数学中即相邻两点的斜率变化），而此变化可以用曲率和微弧长（5.1）来表示，而我们再代入上述表达式和曲率与半径的关系表达式（5.2），即可得到：

在运动坐标系中，一个点可以通过上述方法得到其在上一点的运动坐标系中坐标，然后迭代得到其在绝对坐标系中的坐标，而将所有微圆弧运动坐标系中坐标转化到以起始点为原点的绝对坐标系中，就能得到所有微圆弧在绝对坐标系中的坐标，矩阵变换可以直观反映这个迭代过程：

（矩阵一次变换）

迭代得到第i点的坐标：

所以我们只要知道微圆弧长的对应曲率、初始位置坐标、初始角度就可以迭代求出‘微元’个坐标点，在将其用平滑的曲线连接即可得到重构后的曲线。

运用运动坐标系和微分思想，考虑了曲线局部毛刺对重构曲线的影响，充分利用给出的起始点初始状态和各个传感点对应曲率，迭代得到所有通过三次样条插值得到的微圆弧平面坐标，拟合这些微圆弧坐标，得到重构光纤曲线。

5.2.2 模型的求解

基于上述模型的分析且由于初始角度不确定是45°还是-45°，使用 Matlab编写程序，得到了问题中光纤在平面坐标上的重构曲线：

图表

中度可信度描述已自动生成

图5.2 初始角度为45°时的重构曲线

图表

描述已自动生成

图5.3 初始角度为-45°时的重构曲线

5.2.3 模型结果的分析

分析模型求解得出的重构曲线，我们发现两次测试中光纤到平面坐标的投影时一个逐渐扩增的椭圆，由此推测实验中光纤在两次测试中受外力影响，实际形状大概是一条螺旋前进的曲线，其平面上的椭圆投影有渐扩的趋势。

此外，重构曲线平面上弯曲程度较大，我们发现我们在第一问中将平面坐标系中中点的横坐标直接当作对应点到初始点的弧长会带来巨大的误差，

由此我们纠正第一题中的错误，根据重构后的曲线使用Matlab编写程序得到更精确的平面坐标x对应的曲率：

表5.3 初始角度为45°时，问题一各个横坐标对应曲线曲率

|  |  |
| --- | --- |
| 初始角度为45度时 | |
| x=0.3(测试1曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.3(测试2曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.4(测试1曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.4(测试2曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.5(测试1曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.5(测试2曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.6(测试1曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.6(测试2曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.7(测试1曲率k) | 超出曲线范围 |
| x=0.7(测试2曲率k) | 超出曲线范围 |

表5.4 初始角度为-45°时，问题一各个横坐标对应曲线曲率

|  |  |
| --- | --- |
| 初始角度为-45度时 | |
| x=0.3(测试1曲率k) | 2.212 / 2.2307 |
| x=0.3(测试2曲率k) | 2.9837 |
| x=0.4(测试1曲率k) | 2.2125 / 2.2314 |
| x=0.4(测试2曲率k) | 2.9817 / 2.9726 / 2.9829 |
| x=0.5(测试1曲率k) | 2.2146 / 2.2325 |
| x=0.5(测试2曲率k) | 2.9791 / 2.9735 / 2.9817 / 2.9813 |
| x=0.6(测试1曲率k) | 2.2178 / 2.2335 |
| x=0.6(测试2曲率k) | 该位置超出测试2曲线范围！ |
| x=0.7(测试1曲率k) | 2.2226 / 2.2336 |
| x=0.7(测试2曲率k) | 该位置超出测试2曲线范围！ |

考虑到所得重构曲线在平面坐标上的曲线是一个逐渐扩增的椭圆，因此一个横坐标x可能对应多个曲率k，为了得到更直观的曲率变化曲线，我们利用Matlab绘制了光纤曲线随其弧长的变化曲线：

图表, 折线图

描述已自动生成

图5.4 测试1中曲率随弧长变换示意图

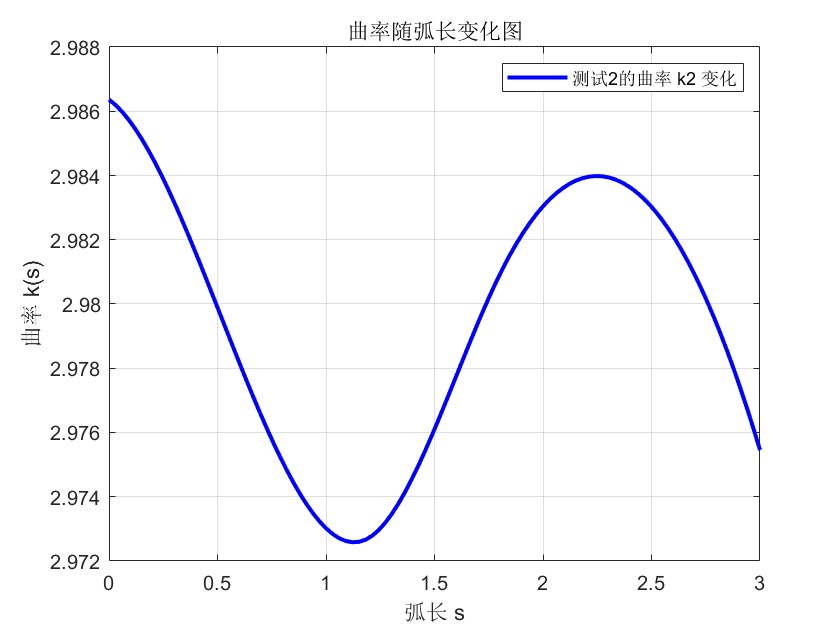


图5.5 测试2中曲率随弧长变换示意图

**5.3 问题三的求解**

5.3.1 对给出曲线进行取样重构

由高等数学知识可知，曲线积分可以通过下列式子计算：

其中两参数方程是分别由原方程x，y通过同一参数t来表示，t自α到β的变化即为t在x在[0，1]上变化时的变化。

由此在曲线上等间距设置5个取样，即将整条曲线均匀划分为6段。在Matlab编写程序，利用公式(5.3)获得这5个采样点的曲率。

对起始点求导：y’(0)=3\*0+1=1

可得初始点的斜率为：1，即此初始点切线与x轴夹角为45°。

由以上数据通过问题二中数学物理模型重构的曲线为：

图表, 折线图

描述已自动生成

图5.6 取样点为五时，原始曲线与重构曲线对比

重构曲线和原始曲线的曲率变化差距图：

图表, 折线图

描述已自动生成

图5.7 取样点为五时，原始曲线与重构曲线曲率随弧长变化对比

用均方根误差（RMSE）来评估得到的重构曲线。

算得的均方根误差为：

重构曲线与原始曲线的均方误差(y坐标的均方误差)为：0.010427

重构曲率与原始曲率的均方误差(曲率的均方误差)为：0.001388

5.3.2 曲线误差分析

（1）取样点过少

通过增加取样点数目，得到均方根误差随取样点数增加的变为：

表5.5 不同取样点数对重构曲线的均方根误差的影响

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 取样点数 | 采样划分弧段数 | y坐标的均方误差 | 曲率的均方误差 | 平均均方误差 |
| 4 | 5 | 0.113707 | 0.007737 | 0.052985 |
| 5 | 6 | 0.010427 | 0.001388 | 0.0045195 |
| 6 | 7 | 0.000365 | 0.000072 | 0.0001465 |
| 7 | 8 | 0.000154 | 0.000053 | 0.0000505 |
| 8 | 9 | 0.000496 | 0.000149 | 0.0001735 |
| 9 | 10 | 0.000531 | 0.000168 | 0.0001815 |
| 10 | 11 | 0.000415 | 0.000139 | 0.000138 |
| 11 | 12 | 0.000283 | 0.000099 | 0.000092 |
| 12 | 13 | 0.00018 | 0.000066 | 0.000057 |
| 13 | 14 | 0.000111 | 0.000043 | 0.000034 |
| 14 | 15 | 0.000067 | 0.000027 | 0.00002 |
| 15 | 16 | 0.000041 | 0.000017 | 0.000012 |
| 16 | 17 | 0.000025 | 0.000011 | 0.000007 |
| 17 | 18 | 0.000016 | 0.000007 | 0.0000045 |
| 18 | 19 | 0.00001 | 0.000004 | 0.000003 |
| 19 | 20 | 0.000006 | 0.000003 | 0.0000015 |

可见增加取样点确实能够减小实验误差，注意取样点到达14次后均方根误差几乎不变，考虑实际运用中传感器成本等限制，本题中取样取6个为最佳。

此时，重构的曲线为：

图表, 折线图

描述已自动生成

图5.8 改善取样点数后的重构曲线与原曲线对比

重构曲线和原始曲线的曲率变化差距图：

图表, 折线图

描述已自动生成

图5.9 改善取样点数后的重构曲线与原曲线曲率随弧长变化对比

微圆弧对实验结果影响

在高等数学中,只要曲线上两点距离足够近,就可以近似认为这两点之间的弧是一段微圆弧，此时每段微圆弧的曲率变化时是均匀的，并且每条微圆弧可以在平面坐标中用一个点的坐标去表示。在实际计算中，我们将各个相邻取样点间曲线等分划分为100段小圆弧，近似得到数学上的微圆弧，由此可能产生误差，对实验结果造成影响，进一步增大曲线的划分数量对于曲线重构没有明显影响，但会严重增大计算机的计算量，因此我们将划分数定为100段。

插值对实验结果影响

在重构曲线时，我们利用三次样条插值法，通过各个采样点数据，插值获得每段小圆弧对应的曲率，插值获得的曲率只是小圆弧实际曲率的近似，由此得到的曲率可能在运用平面变化算法重构曲线时造成影响，不过，我们也发现，增加取样点可以有效减小此干扰对实验结果影响

六、模型评价

**6.1 模型优点**

在根据给出各点曲线曲率，获得题目指定横坐标曲线曲率时，我们采用了三次样条插值法来插值获得指定数据。此方法解决了传感点连接处的光滑问题,并利用曲线的微分关系尽可能的减小了曲线的拟合误差。

在对光纤平面曲线重构时，我们运用了微分思想和平面坐标变换算法来得到重构曲线，在已知曲线起始点切线斜率的情况下，可以通过迭代曲线划分的微圆弧得到重构曲线。此重构曲线受原曲线局部毛刺影响较小，合理考虑了起始点的切线斜率影响。

在使用问题二得到的数学模型重构问题三给出曲线时，我们使用均方根误差（RMSE）来评价重构曲线，并分析了取样点数目对重构曲线的影响，以及重构曲线与原曲线产生偏差的原因所在。

**6.2 模型缺点**

采用三次样条插值法只考虑了对各个传感点的曲率的拟合，没有考虑起始点的初始状态，也将点的横坐标假设为对应弧长，忽视了曲线平面的弯曲影响。

运用平面坐标变换算法重构曲线时，将划分小圆弧近似为数学上的微圆弧，可能对结果产生影响。

使用均方根误差（RMSE）来评价重构曲线时，其结果不能完全反映重构曲线对比原曲线的误差所在，其评估可能失真。

**6.3模型的推广**

此模型可推广至计算任何给定曲线的等弧长点和曲率变化，尤其适用于机器人路径规划、车辆导航系统等领域，其中路径的平滑性和准确性至关重要。例如：

机器人路径规划： 使用此方法计算机器人在复杂环境中应遵循的最优路径，通过曲率控制机器人的转向，确保机器人平滑且高效地移动。

车辆导航： 在自动驾驶技术中，车辆可根据计算出的曲率进行转向，优化行驶路径，提高安全性和舒适性。

动画和游戏开发： 在动画制作或游戏开发中，可通过此方法设计物体或角色的运动轨迹，使动作更加自然和流畅。

七、参考文献

[1]程文胜.基于超弱光纤光栅的曲线重构方法研究[D].三峡大学, 2021.

[2]章亚男,肖海,沈林勇. 用于光纤光栅曲线重建算法的坐标点拟合[J].光学精密工程, 2016, 24(09):2149-2157.

八、附录

|  |
| --- |
| 附件1：利用MATLAB求解第一题： |
| c = 4200; % 常数，题目假设为4200  lambda01 = 1529; % 初始状态1  lambda02 = 1540; % 初始状态2  lambda1 = [1529.808, 1529.807, 1529.813, 1529.812, 1529.814, 1529.809]; % 测试1数据  lambda2 = [1541.095, 1541.092, 1541.090, 1541.093, 1541.094, 1541.091]; % 测试2数据  s = [0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0]; % 传感器间距分段的弧长  k1 = c \* (lambda1 - lambda01) / lambda01; % 测试1得到的曲率  k2 = c \* (lambda2 - lambda02) / lambda02; % 测试2得到的曲率  disp('测试1的传感器所在点曲率数据：');  disp(k1);  disp('测试2的传感器所在点曲率数据：');  disp(k2);  pp1 = spline(s, k1);  pp2 = spline(s, k2); % 对应弧长与曲率的三次样条插值  x\_target = [0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7];  k1\_values=ppval(pp1,x\_target);  k2\_values=ppval(pp2,x\_target);  disp('横坐标x相应位置处的曲率k1:');  disp(k1\_values);  disp('横坐标x相应位置处的曲率k2:');  disp(k2\_values); |

|  |
| --- |
| 附件2：利用MATLAB求解第二题： |
| c = 4200; % 常数，题目假设为4200  lambda01 = 1529; % 初始状态1  lambda02 = 1540; % 初始状态2  lambda1 = [1529.808, 1529.807, 1529.813, 1529.812, 1529.814, 1529.809]; % 测试1数据  lambda2 = [1541.095, 1541.092, 1541.090, 1541.093, 1541.094, 1541.091]; % 测试2数据  s = [0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0]; % 传感器间距分段的弧长  k1 = c \* (lambda1 - lambda01) / lambda01; % 测试1得到的曲率  k2 = c \* (lambda2 - lambda02) / lambda02; % 测试2得到的曲率  pp1 = spline(s, k1);  pp2 = spline(s, k2); % 对应弧长与曲率的三次样条插值  x1 = 0;y1 = 0;  x2 = 0;y2 = 0;  angle1 = pi / 4;  angle2 = pi / 4; % 初始角度为-45度或者45度 (弧度)  positions1 = zeros(100, 2);  positions2 = zeros(100, 2); % 分别存储两次测试数据的点  thinarclength = linspace(0, max(s), 100); % 创建更细的弧长分布  ds = thinarclength(2) - thinarclength(1); % 预计算弧长，即弧长微元  for i = 1:length(thinarclength)  % 对于 k1  angle\_increment1 = ppval(pp1, thinarclength(i)) \* ds; % 计算角度增量  angle1 = angle1 + angle\_increment1; % 更新总角度  x1 = x1 + cos(angle1) \* ds; % 更新x坐标  y1 = y1 + sin(angle1) \* ds; % 更新y坐标  positions1(i, :) = [x1, y1]; % 记录位置  % 对于 k2  angle\_increment2 = ppval(pp2, thinarclength(i)) \* ds; % 计算角度增量  angle2 = angle2 + angle\_increment2; % 更新总角度  x2 = x2 + cos(angle2) \* ds; % 更新x坐标  y2 = y2 + sin(angle2) \* ds; % 更新y坐标  positions2(i, :) = [x2, y2]; % 记录位置  end  % 图1是 题目x处曲率对应输出  x\_target = [0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7];  fprintf('\n题目所求横坐标 x 对应的曲率 k1 和 k2：\n');  for ix = 1:length(x\_target)  fprintf('当x = %.1f时:\n', x\_target(ix));  % 寻找所有x坐标对应的弧长s并计算曲率  idx1 = find(abs(positions1(:,1) - x\_target(ix)) < 1e-2);  idx2 = find(abs(positions2(:,1) - x\_target(ix)) < 1e-2);  if isempty(idx1)  disp('该位置超出测试1曲线范围！');  else  k1\_values = ppval(pp1, thinarclength(idx1));  disp('测试1曲线的对应曲率为:');  disp(k1\_values);  end  if isempty(idx2)  disp('该位置超出测试2曲线范围！');  else  k2\_values = ppval(pp2, thinarclength(idx2));  disp('测试2曲线的对应曲率为:');  disp(k2\_values);  end  end  % 图2是 测试1和测试2得到的路径  figure;  plot(positions1(:, 1), positions1(:, 2), 'r-', 'LineWidth', 2); % 测试1的路径  hold on;  plot(positions2(:, 1), positions2(:, 2), 'b-', 'LineWidth', 2); % 测试2的路径  scatter(0, 0, 80, 'k', 'filled'); % 起始点标记为黑色实心点  title('测试1和测试2的重构曲线');  xlabel('x 轴');  ylabel('y 轴');  legend('测试1的重构曲线', '测试2的重构曲线');  axis equal; % 等比例轴  grid on; % 开启网格  % 图3是 测试1与测试2的曲率随弧长变化的图  figure;  plot(thinarclength, ppval(pp1, thinarclength), 'r-', 'LineWidth', 2); % 测试1的曲率k1随s的变化  hold on;  title('曲率随弧长变化图');  xlabel('弧长 s');  ylabel('曲率 k(s)');  legend('测试1的曲率 k1 变化');  grid on;  figure;  plot(thinarclength, ppval(pp2, thinarclength), 'b-', 'LineWidth', 2); % 测试2的曲率k2随s的变化  hold on;  title('曲率随弧长变化图');  xlabel('弧长 s');  ylabel('曲率 k(s)');  legend('测试2的曲率 k2 变化');  grid on; |

|  |
| --- |
| 附件3：利用MATLAB求解第三题： |
| syms x;  y = x^3 + x; % 原始曲线方程  dy = diff(y, x); % y的一阶导数  d2y = diff(dy, x); % y的二阶导数  arclength = sqrt(1 + dy^2); % 弧长的积分表达式  arclength\_fun = matlabFunction(arclength); % 转换成函数  totalarclength = integral(arclength\_fun,0,1); % 计算总弧长  n = input('请输入划分弧段的数量：');  eachLength = totalarclength / n; % 平均分成若干段的每段弧长  length\_x = zeros(1, n); % 存储等弧长点的x值  arc\_lengths = zeros(1, n); % 存储从0到每个x的弧长  for i = 1:n % 寻找每个等弧长点  eqn = int(arclength\_fun,0,x)==i\*eachLength;  length\_x(i) = vpasolve(eqn, x);  arc\_lengths(i) = i \* eachLength; % 存储实际弧长  end  curvatures = zeros(1, n); % 初始化曲率数组  for i = 1:n % 计算每个等弧长点的曲率  curvatures(i) = abs(subs(d2y, x, length\_x(i)))/(1 + subs(dy^2, x, length\_x(i)))^(3/2);  end  pp = spline(arc\_lengths, curvatures); % 对应弧长与曲率的三次样条插值  x\_pos = 0;  y\_pos = 0; % 初始点为原点  angle = atan(double(subs(dy,x,0))); % 初始角度由一阶导得出  positions = zeros(100, 2); % 存储曲线上点的数组  thinarclength = linspace(0, totalarclength, 100); % 创建更细的弧长分布，用于绘图和计算  ds = thinarclength(2) - thinarclength(1); % 预计算第一段弧长  for i = 1:length(thinarclength) % 沿路径计算新的位置  if i > 1  ds = thinarclength(i) - thinarclength(i-1); % 计算每一小段的弧长  end  angle\_increment = ppval(pp, thinarclength(i)) \* ds; % 计算角度增量即dθ  angle = angle + angle\_increment; % 更新总角度  x\_pos = x\_pos + cos(angle) \* ds; % 更新x坐标  y\_pos = y\_pos + sin(angle) \* ds; % 更新y坐标  positions(i, :) = [x\_pos, y\_pos]; % 记录位置  end  % 图1是 重构路径和原始路径对比图  figure;  fplot(y, [0 1], 'k-', 'LineWidth', 1.5); % 原始曲线  hold on;  plot(positions(:, 1), positions(:, 2), 'r--', 'LineWidth', 2); % 重构曲线图  scatter(0, 0, 80, 'k', 'filled'); % 起点标记  title('比较重构曲线与原始曲线两者差距');  xlabel('x 轴');  ylabel('y 轴');  legend('原始曲线', '重构曲线', '起始点');  axis equal;  grid on;  ori\_y = matlabFunction(y); % 原始曲线 y = x^3 + x 的函数句柄  rec\_y = interp1(positions(:,1), positions(:,2), linspace(0,1,100), 'spline');  ori\_y\_values = arrayfun(ori\_y, linspace(0,1,100));  msey= mean((rec\_y - ori\_y\_values).^2);  fprintf('重构曲线与原始曲线的均方误差为：%f\n', msey); % 计算曲率的均方误差(MSE)  length\_xo = zeros(1, length(thinarclength)); % 存储等弧长点的x值  arc\_lengthso = zeros(1, length(thinarclength)); % 存储从0到每个x的弧长  for i = 1:length(thinarclength) % 寻找每个等弧长点  eqn = int(arclength\_fun,0,x)==thinarclength(i);  length\_xo(i) = vpasolve(eqn, x);  arc\_lengthso(i) = thinarclength(i); % 存储实际弧长  end  ori\_k = zeros(1, length(thinarclength)); % 初始化曲率数组  for i = 1:length(thinarclength) % 计算每个等弧长点的曲率  ori\_k(i) = abs(subs(d2y, x, length\_xo(i)))/(1 + subs(dy^2, x, length\_xo(i)))^(3/2);  end  ori\_k = double(ori\_k); % 符号表达式转为数值  rec\_k = ppval(pp, thinarclength);  msek = mean((rec\_k - ori\_k).^2);  fprintf('重构曲率与原始曲率的均方误差为：%f\n', msek); % 同上  % 图2是 原始曲率与重构曲率的比较图  figure;  plot(thinarclength, ori\_k, 'r-', 'LineWidth', 2);  hold on;  plot(thinarclength, rec\_k, 'b--', 'LineWidth', 2);  title('弧长与曲率变化图');  xlabel('弧长 (s)');  ylabel('曲率 (κ)');  legend('原始曲率变化', '重构曲率变化');  grid on; |